Topologie des espaces normés

Ouverts et fermés

Exercice 1 [01103] [Correction]
Montrer que tout fermé peut s'écrire comme intersection d'une suite décroissante d'ouverts.

Exercice 2 [01104] [Correction]
On désigne par p_1 et p_2 les applications coordonnées de $\mathbb{R}^2$ définies par $p_i(x_1, x_2) = x_i$.
a) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$, montrer que $p_1(O)$ et $p_2(O)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
b) Soit $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\}$. Montrer que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $p_1(H)$ et $p_2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$.
c) Montrer que si F est fermé et que $p_2(F)$ est borné, alors $p_1(F)$ est fermé.

Exercice 3 [01105] [Correction]
Montrer que si un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel normé E est ouvert alors $F = E$.

Exercice 4 [04076] [Correction]
Soient F une partie fermée non vide d'un espace normé E et $x \in E$. Montrer

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

Exercice 5 [01107] [Correction]
Soit E une espace vectoriel normé.
a) Soient F une partie fermée non vide de E et $x \in E$. Montrer

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

b) Soient F et G deux fermés non vides et disjoints de E.
Montrer qu'il existe deux ouverts U et V tels que

$$F \subset U, G \subset V \text{ et } U \cap V = \emptyset$$

Exercice 6 [01106] [Correction]
Soient A, B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E telles que

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y) > 0$$

Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Exercice 7 [01108] [Correction]
On muni le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
$A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$,
$C = \{\text{suites convergentes}\}$,
$D = \left\{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\right\}$ et $E = \{\text{suites périodiques}\}$.

Exercice 8 [01110] [Correction]
On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
a) Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites réelles bornées.
b) $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ étant normé par $\|\,.\,\|_\infty$. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie ouverte ? une partie fermée ?

Exercice 9 [02415] [Correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel il existe un et un seul $y \in A$ tel que $|x - y| = d(x, A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Exercice 10 [02770] [Correction]
On munit l'espace des suites bornées réelles $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_n(|u_n|)$.
a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
b) Montrer que l'ensemble des suites (a_n) qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Exercice 11 [02771] [Correction]
Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a=(a_n)_{n\geqslant 0}$ appartient à E, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

a) Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme sur E.
b) Soit

$$F = \left\{ a \in E / \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 12 [03021] [Correction]
Soient E un espace vectoriel normé, F un sous-espace fermé de E et G un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que $F+G$ est fermé

Exercice 13 [03037] [Correction]
Caractériser dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ les matrices dont la classe de similitude est fermée.
Même question avec $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

Exercice 14 [02507] [Correction]
Soient $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$$

a) Montrer que A est une partie fermée.
b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$$

Exercice 15 [03066] [Correction]
Soient $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ normé par $\|\,.\,\|_\infty$ et la partie

$$A = \left\{ f \in E / f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1 \right\}$$

a) Montrer que A est une partie fermée.
b) Vérifier que

$$\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$$

c) Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A.

Exercice 16 [03289] [Correction]
a) Montrer que les parties

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1 \right\} \text{ et } B = \{0\} \times \mathbb{R}$$

sont fermées.
b) Observer que $A+B$ n'est pas fermée.

Exercice 17 [03290] [Correction]
Montrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:
a) en observant que son complémentaire est ouvert ;
b) par la caractérisation séquentielle des parties fermées ;
c) en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Exercice 18 [03306] [Correction]
Dans $E=\mathbb{R}[X]$, on considère les normes

$$N_1(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[1,2]} |P(t)|$$

L'ensemble

$$\Omega = \{P \in E / P(0) \neq 0\}$$

est-il ouvert pour la norme N_1 ? pour la norme N_2 ?

Intérieur et adhérence

Exercice 19 [01113] [Correction]
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ alors $F=E$.

Exercice 20 [01114] [Correction]
Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé (E,N).
a) On suppose $A\subset B$. Etablir $A^\circ \subset B^\circ$ et $\bar{A}\subset\bar{B}$.
b) Comparer $(A\cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ d'une part puis $(A\cup B)^\circ$ et $A^\circ\cup B^\circ$ d'autre part.
c) Comparer $\overline{A\cup B}$ et $\bar{A}\cup\bar{B}$ d'une part puis $\overline{A\cap B}$ et $\bar{A}\cap\bar{B}$ d'autre part.

Exercice 21 [01115] [Correction]
Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E alors son adhérence $\bar{F}$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 22 [03279] [Correction]
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Etablir

$$\mathrm{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect} A}$$

Exercice 23 [01116] [Correction]
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Etablir que sa frontière $\mathrm{Fr}(A)$ est une partie fermée.

Exercice 24 [01117] [Correction]
Soit F une partie fermée d'un espace vectoriel normé E. Etablir

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(F)) = \mathrm{Fr}(F)$$

Exercice 25 [01118] [Correction]
Soient A un ouvert et B une partie d'un espace vectoriel normé E.
a) Montrer que $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$
b) Montrer que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Exercice 26 [01119] [Correction]
On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.
a) Montrer que $\bar{A}$ est convexe.
b) La partie A° est-elle convexe ?

Exercice 27 [01120] [Correction]
Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E.
Etablir

$$d(\bar{A}, \bar{B}) = d(A, B)$$

(en notant $d(A, B) = \inf\limits_{x \in A, y \in B} d(x, y)$)

Exercice 28 [01121] [Correction]
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties d'un espace vectoriel normé E.
a) Etablir $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.
b) Comparer $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i}$ et $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Exercice 29 [01122] [Correction]
Soient $f : E \to F$ continue bornée et $A \subset E$, A non vide. Montrer

$$\|f\|_{\infty, A} = \|f\|_{\infty, \bar{A}}$$

Exercice 30 [02943] [Correction]
Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 31 [03026] [Correction]
Soit A une partie d'un espace normé E.
a) Montrer que la partie A est fermée si, et seulement si, $\mathrm{Fr} A \subset A$.
b) Montrer que la partie A est ouverte si, et seulement si, $A \cap \mathrm{Fr} A = \emptyset$

Exercice 32 [03470] [Correction]
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on introduit

$$\mathcal{U} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) / \mathrm{Sp} M \subset U\} \text{ et } \mathcal{R} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) / \exists n \in \mathbb{N}^\star, M^n = I_2\}$$

a) Comparer les ensembles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{U}$.
b) Montrer que $\mathcal{U}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
c) Montrer que $\mathcal{U}$ est inclus dans l'adhérence de $\mathcal{R}$.
d) Qu'en déduire ?

Continuité et topologie

Exercice 33 [01123] [Correction]
Justifier que $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < x^3 + y^3\right\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 34 [01124] [Correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 35 [01125] [Correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien.
Montrer que l'ensemble $\left\{(x,y)\in E^2/(x,y) \text{ libre}\right\}$ est un ouvert de E^2.

Exercice 36 [01126] [Correction]
Pour $p\in\{0,1,\dots,n\}$, on note R_p l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang supérieur à p.
Montrer que R_p est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 37 [01127] [Correction]
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f:E\to F$. Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes :
(i) f est continue ;
(ii) $\forall A\in\mathcal{P}(E), f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$;
(iii) $\forall B\in\mathcal{P}(F), \overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\bar{B})$;
(iv) $\forall B\in\mathcal{P}(F), f^{-1}(B^\circ)\subset\left(f^{-1}(B)\right)^\circ$.

Exercice 38 [01128] [Correction]
Montrer qu'un endomorphisme u d'un espace vectoriel normé E est continu si, et seulement si, la partie $\{x\in E/\left\|u(x)\right\|=1\}$ est fermée.

Exercice 39 [01129] [Correction]
Montrer qu'une forme linéaire est continue si, et seulement si, son noyau est fermé.

Exercice 40 [03393] [Correction]
Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une application continue vérifiant

$$f\circ f=f$$

a) Montrer que l'ensemble

$$\{x\in[0,1]\,/\,f(x)=x\}$$

est un intervalle fermé et non vide.
b) Donner l'allure d'une fonction f non triviale vérifiant les conditions précédentes.
c) On suppose de plus que f est dérivable. Montrer que f est constante ou égale à l'identité.

Exercice 41 [02774] [Correction]
a) Chercher les fonctions $f:[0,1]\to[0,1]$ continues vérifiant

$$f\circ f=f$$

b) Même question avec les fonctions dérivables.

Exercice 42 [03285] [Correction]
Soient E un espace normé de dimension quelconque et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x\in E, \|u(x)\|\leqslant\|x\|$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$v_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u^k$$

a) Simplifier $v_n\circ(u-\mathrm{Id})$.
b) Montrer que

$$\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})\cap\ker(u-\mathrm{Id})=\{0\}$$

c) On suppose E de dimension finie, établir

$$\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})\oplus\ker(u-\mathrm{Id})=E$$

d) On suppose de nouveau E de dimension quelconque.
Montrer que si

$$\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})\oplus\ker(u-\mathrm{Id})=E$$

alors la suite (v_n) converge simplement et l'espace $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$ est une partie fermée de E.
e) Etudier la réciproque.

Exercice 43 [01111] [Correction]
Montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 44 [02773] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}^\star$, O_n désigne l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples et F_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples.
Ces ensemble sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 45 [03726] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant
1) $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}, f([a, b])$ est un segment ;
2) $y \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{y\})$ est une partie fermée.
Montrer que f est continue.

Exercice 46 [03859] [Correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des projecteurs de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

Densité

Exercice 47 [01130] [Correction]
Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra considérer, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices de la forme $A - \lambda I_n$.

Exercice 48 [01131] [Correction]
Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
a) Montrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
b) Montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Exercice 49 [01132] [Correction]
Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E.
a) Etablir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de E.
b) En déduire que la réunion de deux fermés d'intérieurs vides est aussi d'intérieur vide.

Exercice 50 [03058] [Correction]
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_n \to +\infty,\ v_n \to +\infty \text{ et } u_{n+1} - u_n \to 0$$

a) Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$.
Montrer que pour tout $a \geqslant u_{n_0}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.
b) En déduire que $\{u_n - v_p/n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
c) Montrer que l'ensemble $\{\cos(\ln n)/n \in \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 51 [03017] [Correction]
Montrer que $\{m - \ln n/(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 52 [01133] [Correction]
Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
a) Justifier l'existence de

$$a = \inf \{x \in H/x > 0\}$$

b) On suppose $a > 0$. Etablir $a \in H$ puis $H = a\mathbb{Z}$.
c) On suppose $a = 0$. Etablir que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 53 [00023] [Correction]
a) Montrer que $\{\cos(n)/n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
b) Montrer que $\{\cos(\ln n)/n \in \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 54 [01135] [Correction]
Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 55 [02779] [Correction]
Montrer qu'un hyperplan d'un espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est dense ou fermé dans E.

Exercice 56 [01134] [Correction]
On note $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
a) Montrer que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une partie dense de l'espace des suites sommables normé par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

b) $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est-il une partie dense de l'espace des suites bornées normé par

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \ ?$$

Exercice 57 [02780] [Correction]
On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0,+\infty[$ et dont le carré est intégrable. On admet que E est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme

$$\|\,.\,\|_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

On note E_0 l'ensemble des $f \in E$ telles que f est nulle hors d'un certain segment.
On note F l'ensemble des fonctions de E du type $x \mapsto P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x^2/2}$ où P parcourt $\mathbb{R}[X]$. Montrer que E_0 est dense dans E puis que F est dense dans E.

Exercice 58 [02944] [Correction]
Soit A une partie convexe et partout dense d'un espace euclidien E.
Montrer que $A = E$.

Exercice 59 [03018] [Correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a, b \in A, \frac{a+b}{2} \in A$$

Montrer que A est dense dans l'intervalle $]\inf A, \sup A[$.

Exercice 60 [03020] [Correction]
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^{+\star}$ vérifiant

$$\forall (a,b) \in A^2, \sqrt{ab} \in A$$

Montrer que $A \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ est dense dans $]\inf A, \sup A[$.

Exercice 61 [03059] [Correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note $N_\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$$

Montrer que N_φ est une norme sur E si, et seulement si, $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est dense dans $[0,1]$.

Exercice 62 [03402] [Correction]
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$(u_n) \text{ strictement croissante, } u_n \to +\infty \text{ et } \frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$$

Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{\frac{u_m}{u_n} / m > n\right\}$$

est une partie dense dans l'intervalle $[1,+\infty[$

Exercice 63 [03649] [Correction]
Soient A et B deux parties denses d'un espace normé E.
On suppose la partie A ouverte, montrer que $A \cap B$ est une partie dense.

Continuité et densité

Exercice 64 [01136] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Déterminer f.

Exercice 65 [01139] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

a) Montrer que $\mathcal{D} = \{p/2^n / p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
b) Montrer que si f s'annule en 0 et en 1 alors $f = 0$.
c) Conclure que f est une fonction affine.

Exercice 66 [01137] [Correction]
Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 67 [01138] [Correction]
Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\det(\text{com}A)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 68 [03128] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
a) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
Exprimer la comatrice de $P^{-1}AP$ en fonction de P, P^{-1} et de la comatrice de A.
b) En déduire que les comatrices de deux matrices semblables sont elle-même semblables.

Exercice 69 [00750] [Correction]
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.
a) Calculer $\det \widetilde{A}$.
b) Etudier le rang de $\widetilde{A}$.
c) Montrer que si A et B sont semblables alors $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ le sont aussi.
d) Calculer $\widetilde{\widetilde{A}}$.

Exercice 70 [03275] [Correction]
Montrer

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$$

Approximations uniformes

Exercice 71 [01140] [Correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue. Montrer

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On pourra commencer par étudier le cas où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 72 [01141] [Correction]
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

alors f est la fonction nulle.

Exercice 73 [01142] [Correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que

$$\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - P_n(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 74 [01143] [Correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que $P_n \geqslant 0$ sur $[a, b]$ et $\sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t) - P_n(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 75 [01144] [Correction]
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes telle que

$$N_\infty(f - P_n) \to 0 \text{ et } N_\infty(f' - P_n') \to 0$$

Exercice 76 [01145] [Correction]
[Théorème de Weierstrass : par les polynômes de Bernstein]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose

$$B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}$$

a) Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x), \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x)$$

b) Soient $\alpha > 0$ et $x \in [0, 1]$. On forme

$$A = \{k \in [\![0, n]\!] \,/\, |k/n - x| \geqslant \alpha\} \text{ et } B = \{k \in [\![0, n]\!] \,/\, |k/n - x| < \alpha\}$$

Montrer que

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

c) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On pose

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Exercice 77 [01146] [Correction]
[Théorème de Weierstrass : par convolution]
n désigne un entier naturel.
On pose

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$$

et on considère la fonction $\varphi_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n}(1-x^2)^n$$

a) Calculer $\int_0^1 t(1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$. En déduire que

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{n+1}$$

b) Soit $\alpha \in]0,1]$. Montrer que (φ_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha, 1]$.
c) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$.
Montrer que f est uniformément continue.
On pose

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
d) Montrer que f_n est une fonction polynomiale sur $[-1/2, 1/2]$
e) Montrer que

$$f(x) - f_n(x) = \int_{-1}^{1} (f(x) - f(x-t))\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

f) En déduire que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
g) Soit f une fonction réelle continue nulle en dehors de $[-a, a]$.
Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.
h) Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$.
Montrer que f est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Exercice 78 [02828] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

a) Montrer que la fonction f est nulle.
b) Calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$$

c) En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0,+\infty[\,, \mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on ait

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Exercice 79 [02601] [Correction]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
On désire établir ,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f(x)\left|\sin(nx)\right|\,\mathrm{d}x \right) = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

a) Vérifier le résultat pour une fonction f constante.
b) Observer le résultat pour une fonction f en escalier.
c) Etendre enfin le résultat au cas où f est une fonction continue par morceaux.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Soient F un fermé et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$O_n = \bigcup_{a \in F} B(a, 1/n)$$

O_n est un ouvert (car réunion d'ouverts) contenant F. Le fermé F est donc inclus dans l'intersection des O_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
Inversement si x appartient à cette intersection, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in F$ tel que $x \in B(a_n, 1/n)$. La suite (a_n) converge alors vers x et donc $x \in F$ car F est fermé.
Finalement F est l'intersection des O_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) Soit $x \in p_1(O)$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $a = (x, y) \in O$. Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\infty(a, \varepsilon) \subset O$ et alors $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset p_1(O)$. Ainsi $p_1(O)$ et de même $p_2(O)$ est ouvert.
b) Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathrm{N}} \in H^{\mathrm{N}}$ telle que $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Comme $x_n y_n = 1$, à la limite $xy = 1$.
Par la caractérisation séquentielle des fermés, H est fermé. $p_1(H) = \mathbb{R}^\star$, $p_2(H) = \mathbb{R}^\star$ ne sont pas fermés dans $\mathbb{R}$.
c) Soit $(x_n)_{n\in\mathrm{N}} \in (p_1(F))^{\mathrm{N}}$ telle que $x_n \to x$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe y_n tel que $(x_n, y_n) \in F$.
La suite $((x_n, y_n))$ est alors une suite bornée dont on peut extraire une suite convergente : $((x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}))$.
Notons $y = \lim y_{\varphi(n)}$. Comme F est fermé, $(x, y) = \lim(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in F$ puis $x = p_1((x, y)) \in p_1(F)$.

Exercice 3 : [énoncé]
$0_E \in F$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B(0_E, \alpha) \subset F$.
Pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = \lambda y$$

avec $y \in B(0_E, \alpha)$ et λ bien choisis
On a alors $y \in F$ puis $x \in F$ car F est un sous-espace vectoriel.
Ainsi $F = E$.

Exercice 4 : [énoncé]
Rappelons

$$d(x, F) = \inf \{\|x - y\| / y \in F\}$$

($\Leftarrow$) Si $x \in F$ alors $0 \in \{\|x - y\| / y \in F\}$ et donc $d(x, F) = 0$
($\Rightarrow$) Si $d(x, F) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in F$ vérifiant

$$\|x - y_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En faisant varier n, cela détermine $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \to x$.
Or F est une partie fermée, elle contient les limites de ses suites convergentes et par conséquent $x \in F$.

Exercice 5 : [énoncé]
a) Rappelons

$$d(x, F) = \inf \{\|x - y\| / y \in F\}$$

($\Leftarrow$) Si $x \in F$ alors $0 \in \{\|x - y\| / y \in F\}$ et donc $d(x, F) = 0$
($\Rightarrow$) Si $d(x, F) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in F$ vérifiant

$$\|x - y_n\| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En faisant varier n, cela déterminer $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \to x$.
Or F est une partie fermée, elle contient les limites de ses suites convergentes et par conséquent $x \in F$.
b) Soient

$$U = \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{2} d(x, G)\right) \text{ et } V = \bigcup_{x \in G} B\left(x, \frac{1}{2} d(x, F)\right)$$

Les parties U et V sont ouvertes car réunion de boules ouvertes et il est clair que U et V contiennent respectivement F et G.
S'il existe $y \in U \cap V$ alors il existe $a \in F$ et $b \in G$ tels que

$$d(a, y) < \frac{1}{2} d(a, G) \text{ et } d(b, y) < \frac{1}{2} d(b, F)$$

Puisque

$$d(a, G), d(b, F) \leqslant d(a, b)$$

on a donc

$$d(a, b) \leqslant d(a, y) + d(y, b) < d(a, b)$$

C'est absurde et on peut conclure

$$U \cap V = \emptyset$$

Exercice 6 : [énoncé]
Les ensembles
$$U = \bigcup_{a\in A} B(a,d/2) \text{ et } V = \bigcup_{b\in B} B(b,d/2)$$
avec $d = d(A,B)$ sont solutions.
En effet U et V sont des ouverts (par réunion d'ouverts) contenant A et B.
U et V sont disjoints car
$$U\cap V \neq \emptyset \Rightarrow \exists (a,b)\in A\times B, B(a,d/2)\cap B(b,d/2)\neq\emptyset \Rightarrow d(A,B) < d$$

Exercice 7 : [énoncé]
A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $p\in\mathbb{N}$,
$u_n^p \leqslant u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leqslant u_{n+1}$ et donc $u\in A$.
B est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\|u-u^p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \underset{n\to\infty}{\to} 0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que
$$\forall n\geqslant N, |u_n^p| \leqslant \varepsilon/2$$
et donc
$$|u_n| \leqslant |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leqslant \varepsilon$$
Ainsi $u\to 0$ et donc $u\in B$.
C est fermé. En effet si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p, la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \leqslant \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p$. $v^p\in B$ et $v^p \to u-\ell$ donc $u-\ell\in B$ et $u\in C$.
D est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $\|u-u^p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe une infinité de n tels que $|u_n^p| \leqslant \varepsilon/2$ et donc tels que
$$|u_n| \leqslant |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leqslant \varepsilon$$
Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u\in D$.
E n'est pas fermé. Notons δ^p, la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore.
Posons alors
$$u^p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k}\delta^k$$
qui est élément de E. La suite u^p converge car
$$\left\|u^{p+q} - u^p\right\|_\infty \leqslant \sum_{k=p+1}^{p+q}\frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^p} \to 0$$
et la limite u de cette suite n'est pas périodique car
$$u_0 = \lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^p \frac{1}{2^k} = 1$$
et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Exercice 8 : [énoncé]
a) Les éléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ sont bornés donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\subset\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
L'appartenance de l'élément nul et la stabilité par combinaison linéaire sont immédiates.
b) Si $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est ouvert alors puisque $0\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ il existe $\alpha > 0$ tel que $B_\infty(0,\alpha)\subset\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.
Or la suite constante égale à $\alpha/2$ appartient à $B_\infty(0,\alpha)$ et n'est pas nulle à partir d'un certain rang donc $B_\infty(0,\alpha)\not\subset\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas ouvert.
c) Pour $N\in\mathbb{N}$, posons u^N définie par $u_n^N = \frac{1}{n+1}$ si $n\leqslant N$ et $u_n^N = 0$ sinon.
$(u^N)\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $u^N\to u$ avec u donné par $u_n = \frac{1}{n+1}$. En effet
$$\left\|u^N - u\right\|_\infty = \frac{1}{N+2}\to 0$$
Mais $u\notin\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ donc $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ n'est pas fermé.

Exercice 9 : [énoncé]
Soit $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x\in\mathbb{R}$. Il existe un unique $y\in A$ tel que $|x-y| = d(x,A)$. Or $d(x,A) = 0$ donc $x = y\in A$. Ainsi A est fermé.
Par l'absurde supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existe $a < c < b$ tel que $a,b\in A$ et $c\notin A$.
Posons $\alpha = \sup\{x\in A/x\leqslant c\}$ et $\beta = \inf\{x\in A/x\geqslant c\}$. On a $\alpha,\beta\in A$, $\alpha < c < \beta$ et $]\alpha,\beta[\subset C_{\mathbb{R}}A$.
Posons alors $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. On a $d(\gamma,A) = \frac{\beta-\alpha}{2} = |\gamma-\alpha| = |\gamma-\beta|$ ce qui contredit l'hypothèse d'unicité. Absurde.

Exercice 10 : [énoncé]
a) Notons C l'espace des suites convergentes de $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
Soit (u^n) une suite convergente d'éléments de C de limite u^∞.
Pour chaque n, posons $\ell^n = \lim u^n = \lim\limits_{p\to+\infty} u_p^n$.
Par le théorème de la double limite appliquée à la suite des fonctions u^n, on peut affirmer que la suite (ℓ^n) converge et que la suite u^∞ converge vers la limite de (ℓ^n). En particulier $u^\infty \in C$.
b) Notons A l'espace des suites dont le terme général est terme général d'une série absolument convergente.
Soit (u^n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}$$

La suite (u^n) est une suite d'éléments de A et une étude en norme $\|\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \to u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de A, la partie A n'est pas fermée.

Exercice 11 : [énoncé]
a) Par définition de l'ensemble E, l'application $\|\,.\,\| : E \to \mathbb{R}^+$ est bien définie.
Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|a+b\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) = \|a\| + \|b\|$$

avec convergence des séries écrites, et

$$\|\lambda.a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|\,|a_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = |\lambda|\,\|a\|$$

Enfin, si $\|a\| = 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant \|a\| = 0$$

donne $(a_n)_{n\geqslant 0} = (0)_{n\geqslant 0}$
b) Considérons la forme linéaire

$$\varphi : (a_n)_{n\geqslant 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

On vérifie

$$\forall a = (a_n)_{n\geqslant 0} \in E, |\varphi(a)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \|a\|$$

La forme linéaire φ est donc continue.
Puisque $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ avec $\{1\}$, la partie F est fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue..
Posons $e = (1,0,0,\dots)$ et un élément de F et

$$\forall \alpha > 0,\ e + \alpha e \notin F \text{ et } \|e - (e+\alpha e)\| = \alpha$$

On en déduit que F n'est pas un voisinage de son élément e et par conséquent la partie F n'est pas ouverte.
Posons $\alpha^p = e + p.(1,-1,0,0,\dots)$.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \alpha^p \in F \text{ et } \|\alpha^p\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

La partie F n'est donc pas bornée.

Exercice 12 : [énoncé]
Pour obtenir ce résultat, il suffit de savoir montrer $F + \mathrm{Vect}(u)$ fermé pour tout $u \notin F$.
Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de $F + \mathrm{Vect}(u)$ de limite x.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $x_n = y_n + \lambda_n u$ avec $y_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$.
Montrons en raisonnant par l'absurde que la suite (λ_n) est bornée.
Si la suite (λ_n) n'est pas bornée, quitte à considérer une suite extraite, on peut supposer $|\lambda_n| \to +\infty$.
Posons alors $z_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n + u$.
Puisque $\|x_n\| \to \|x\|$ et $|\lambda_n| \to +\infty$, on a $\|z_n\| \to 0$ et donc $\frac{1}{\lambda_n} y_n \to -u$.
Or la suite de terme général $\frac{1}{\lambda_n} y_n$ est une suite d'éléments de l'espace fermé F, donc $-u \in F$ ce qui exclu.
Ainsi la suite (λ_n) est bornée et on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(n)})$ de limite $\lambda \in \mathbb{K}$.
Par opérations, la suite $(y_{\varphi(n)})$ est alors convergente.
En notant y sa limite, on a $y \in F$ car l'espace F est fermé.
En passant la relation $x_n = y_n + \lambda_n u$ à la limite on obtient $x = y + \lambda u \in F + \mathrm{Vect}(u)$.
Ainsi l'espace $F + \mathrm{Vect}(u)$ est fermé.

Exercice 13 : [énoncé]
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.
Soit (A_p) une suite convergente de matrices semblables à A.
Notons A_∞ la limite de (A_p).

Si P est un polynôme annulateur de A, P est annulateur des A_p et donc P annule A_∞. Puisque A est supposée diagonalisable, il existe un polynôme scindé simple annulant A et donc A_∞ et par suite A_∞ est diagonalisable.
De plus $\chi_A = \chi_{A_p}$ donc à la limite $\chi_A = \chi_{A_\infty}$.
On en déduit que A et A_∞ ont les mêmes valeurs propres et que celles-ci ont mêmes multiplicités. On en conclut que A et A_∞ sont semblables.
Ainsi la classe de similitude de A est fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable.
A titre d'exemple, considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$P_p^{-1}AP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \to \lambda I_2$$

qui n'est pas semblable à A.
De façon plus générale, si la matrice A n'est pas diagonalisable, il existe une valeur propre λ pour laquelle

$$\ker(A - \lambda I_2)^2 \neq \ker(A - \lambda I_2)$$

Pour $X_2 \in \ker(A - \lambda I_2)^2 \setminus \ker(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$. En complétant la famille libre (X_1, X_2) en une base, on obtient que la matrice A est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & (\star) \\ 0 & \lambda & (\star) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, \dots, 1)$, on obtient

$$P_p^{-1}TP_p = \begin{pmatrix} \lambda & 1/p & (\star/p) \\ 0 & \lambda & (\star) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 & (0) \\ 0 & \lambda & (\star) \\ (0) & (0) & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

Or cette matrice n'est pas semblable à T ni à A car $\operatorname{rg}(A_\infty - \lambda I_n) \neq \operatorname{rg}(T - \lambda I_n)$.
Ainsi, il existe une suite de matrices semblables à A qui converge vers une matrice qui n'est pas semblable à A, la classe de similitude de A n'est pas fermée.
Cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ alors toute limite A_∞ d'une suite de la classe de similitude de A est semblable à A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = A_\infty$. On a alors $AP = PA_\infty$. En introduisant les parties réelles et imaginaires de P, on peut écrire $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
L'identité $AP = PA_\infty$ avec A et A_∞ réelles entraîne $AQ = QA_\infty$ et $AR = RA_\infty$.
Puisque la fonction polynôme $t \mapsto \det(Q + tR)$ n'est pas nulle (car non nulle en i), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P' = Q + tR \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et pour cette matrice $AP' = P'A_\infty$.
Ainsi les matrices A et A_∞ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
Il existe une valeur propre complexe λ pour laquelle $\ker(A - \lambda I_2)^2 \neq \ker(A - \lambda I_2)$.
Pour $X_2 \in \ker(A - \lambda I_2)^2 \setminus \ker(A - \lambda I_2)$ et $X_1 = (A - \lambda I_2)X_2$, la famille (X_1, X_2) vérifie $AX_1 = \lambda X_1$ et $AX_2 = \lambda X_2 + X_1$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, il suffit de reprendre la démonstration qui précède.
Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on peut écrire $\lambda = a + ib$ avec $b \in \mathbb{R}^\star$.
Posons $X_3 = \bar{X}_1$ et $X_4 = \bar{X}_2$.
La famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre car $\lambda \neq \bar{\lambda}$.
Introduisons ensuite $Y_1 = \operatorname{Re}(X_1)$, $Y_2 = \operatorname{Re}(X_2)$, $Y_3 = \operatorname{Im}(X_1)$ et $Y_4 = \operatorname{Im}(X_2)$.
Puisque $\operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(Y_1, \dots, Y_4) = \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(X_1, \dots, X_4)$, la famille $(Y_1, \dots, Y_4)$ est libre et peut donc être complétée en une base.
On vérifie par le calcul $AY_1 = aY_1 - bY_3$, $AY_2 = aY_2 - bY_4 + Y_1 AY_3 = aY_3 + bY_1$ et $AY_4 = bY_2 + aY_4 + Y_3$.
et on obtient que la matrice A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} T & \star \\ O & B \end{pmatrix}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 1 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Pour $P_p = \operatorname{diag}(p, 1, p, 1, \dots 1)$, on obtient

$$P_p^{-1}TP_p \to \begin{pmatrix} T_\infty & \star' \\ O & B \end{pmatrix} = A_\infty$$

avec

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Or dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice A_∞ est semblable est à $\operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}, B)$ qui n'est pas semblable à A pour des raisons de dimensions analogues à ce qui a déjà été vu.
Les matrices réelles A et A_∞ ne sont pas semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ni a fortiori dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que la classe de similitude de A n'est pas fermée

Exercice 14 : [énoncé]
a) Soient (f_n) une suite convergente d'éléments de A et $f_\infty \in E$ sa limite.
Puisque la convergence de la suite (f_n) a lieu pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$, cette convergence correspond à la convergence uniforme. En particulier, il y a convergence simple et

$$f_n(0) \to f_\infty(0)$$

On en déduit $f_\infty(0) = 0$.
Puisqu'il y a convergence uniforme de cette suite de fonctions continues, on a aussi

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$$

Ainsi $f_\infty \in A$ et la partie A est donc fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.
b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in A$ vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Puisque

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \leqslant 1$$

on peut affirmer que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

et donc

$$\int_0^1 (1 - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

Or la fonction $t \mapsto 1 - f(t)$ est continue et positive, c'est donc la fonction nulle.
Par suite f est la fonction constante égale à 1, or $f(0) = 0$, c'est absurde.

Exercice 15 : [énoncé]
a) Soient (f_n) une suite convergente d'éléments de A et $f_\infty \in E$ sa limite.
Puisque la convergence de la suite (f_n) a lieu pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$, il s'agit d'une convergence uniforme.
Puisqu'il y a convergence uniforme, il y a convergence simple et en particulier

$$f_n(0) \to f_\infty(0)$$

On en déduit $f_\infty(0) = 0$.
Puisqu'il y a convergence uniforme de cette suite de fonctions continues, on a aussi

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $\int_0^1 f_\infty(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$.
Ainsi $f_\infty \in A$ et la partie A est donc fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.
b) Par l'absurde, supposons qu'il existe $f \in A$ vérifiant $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Puisque

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \leqslant 1$$

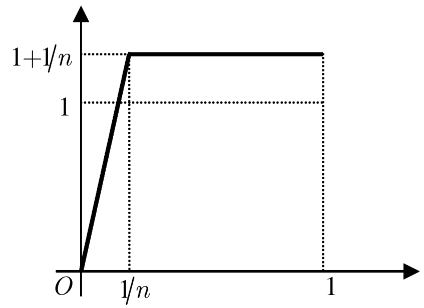
on peut affirmer que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

et donc

$$\int_0^1 (1 - f(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

Or la fonction $t \mapsto 1 - f(t)$ est continue et positive, c'est donc la fonction nulle.
Par suite f est la fonction constante égale à 1, or $f(0) = 0$, c'est absurde.
c) $d(\tilde{0}, A) = \inf\limits_{f \in A} \|f\|_\infty$ et par ce qui précède on a déjà $d(\tilde{0}, A) \geqslant 1$.
Considérons maintenant la fonction f_n définie pour $n \in \mathbb{N}^\star$ par le schéma.



La fonction f_n

La fonction f_n est continue, $f_n(0) = 0$ et par calcul d'aires

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n}\frac{n+1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{n+1}{n} = \frac{(2n-1)(n+1)}{2n^2} = \frac{2n^2+n-1}{2n^2} \geqslant 1$$

Ainsi la fonction f_n est élément de A. Or

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n+1}{n} \to 1$$

donc

$$d(\tilde{0}, A) = 1$$

Exercice 16 : [énoncé]

a) Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de A de limite $u_\infty = (x_\infty, y_\infty)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = (x_n, y_n)$ avec $x_n y_n = 1$. À la limite on obtient $x_\infty y_\infty = 1$ et donc $u_\infty = 1$.
En vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées, on peut affirmer que A est fermée.
La partie B, quant à elle, est fermée car produit cartésien de deux fermées.
b) Posons

$$u_n = (1/n, 0) = (1/n, n) + (0, -n) \in A + B$$

Quand $n \to +\infty$, $u_n \to (0,0)$.
Or $(0,0) \notin A + B$ car le premier élément d'un couple appartenant à $A+B$ ne peut pas être nul.

Exercice 17 : [énoncé]

a) On a

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$$

Puisque $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ est une réunion d'ouverts, c'est un ouvert.
b) Soit (x_n) une suite convergente d'entiers de limite ℓ.
Pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |x_n - \ell| < 1/2$$

et alors

$$\forall m, n \geqslant N, |x_m - x_n| < 1$$

Puisque les termes de la suite (x_n) sont entiers, on en déduit

$$\forall m, n \geqslant N, x_m = x_n$$

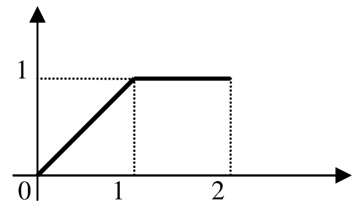
La suite (x_n) est alors constante à partir du rang N et sa limite est donc un nombre entier.
c) Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.
La fonction f est continue et

$$\mathbb{Z} = f^{-1}(\{0\})$$

avec $\{0\}$ partie fermée de $\mathbb{R}$.

Exercice 18 : [énoncé]

Posons $\varphi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(P) = P(0)$.
L'application φ est linéaire et puisque $|\varphi(P)| \leqslant N_1(P)$, cette application est continue. On en déduit que $\Omega = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est un ouvert relatif à E i.e. un ouvert de E pour la norme N_1.
Pour la norme N_2, montrons que la partie Ω n'est pas ouverte en observant qu'elle n'est pas voisinage de son point $P = 1$. Pour cela considérons la fonction continue $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ donnée par le graphe suivant :



Par le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes vérifiant

$$\sup_{t\in[0,2]} |P_n(t) - f(t)| \to 0$$

et en particulier

$$P_n(0) \to 0 \text{ et } N_2(P_n - P) \to 0$$

Considérons alors la suite de polynômes (Q_n) avec

$$Q_n = P_n - P_n(0)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(0) = 0$ donc $Q_n \notin \Omega$ et

$$N_2(Q_n) \leqslant N_2(P_n - P) + |P_n(0)| \to 0$$

donc

$$Q_n \xrightarrow{N_2} P$$

Puisque la partie Ω n'est pas voisinage de chacun de ses points, elle n'est pas ouverte pour la norme N_2.

Exercice 19 : [énoncé]

Supposons $\mathring{F} \neq \emptyset$ et introduisons $x \in \mathring{F}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset F$. Pour tout $u \in E$ tel que $u \neq 0_E$, considérons

$$y = x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{u}{\|u\|}$$

on a $y \in B(x, \varepsilon)$ donc $y \in F$, or $x \in F$ donc $u \in F$. Ainsi $E \subset F$ puis $E = F$.

Exercice 20 : [énoncé]
a) Si a est intérieur à A alors A est voisinage de a et donc B aussi. Par suite $a \in B^\circ$.
Si a est adhérent à A alors a est limite d'une suite convergente d'éléments de A. Celle-ci est aussi une suite convergente d'éléments de B donc $a \in \bar{B}$. On peut aussi déduire ce résultat du précédent par un passage au complémentaire.
b) $A \cap B \subset A, B$ donc $(A \cap B)^\circ$ est inclus dans $A^\circ \cap B^\circ$. Inversement si a un élément de $A^\circ \cap B^\circ$, alors A est voisinage de a et B aussi donc $A \cap B$ est voisinage de a et donc a est intérieur à $A \cap B$. Ainsi $(A \cap B)^\circ$ et $A^\circ \cap B^\circ$ sont égaux.
$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc $A^\circ \cup B^\circ$ est inclus dans $(A \cup B)^\circ$. L'égalité n'est pas toujours vraie. Un contre-exemple est obtenu pour $A =]0,1]$ et $B = [1,2[$ où $A^\circ \cup B^\circ =]0,1[\cup]1,2[$ alors que $(A \cup B)^\circ =]0,2[$.
c) Par passage au complémentaire des résultats précédents : $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$ sont égaux alors que $\bar{A} \cap \bar{B}$ contient $\overline{A \cap B}$ sans pouvoir dire mieux. On peut aussi mener une résolution directe en exploitant a) et la caractérisation séquentielle des points adhérents pour l'inclusion de $\overline{A \cup B}$ dans $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice 21 : [énoncé]
$\bar{F} \subset E$ et $0_E \in \bar{F}$ car $0_E \in F$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in \bar{F}$.
Il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F vérifiant

$$x_n \to x \text{ et } y_n \to y$$

On a alors

$$\lambda x_n + \mu y_n \to \lambda x + \mu y$$

avec $\lambda x_n + \mu y_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit $\lambda x + \mu y \in \bar{F}$.

Exercice 22 : [énoncé]
Puisque $A \subset \mathrm{Vect} A$, on a $\bar{A} \subset \overline{\mathrm{Vect} A}$.
Puisque $\mathrm{Vect} A$ est un sous-espace vectoriel, on montrer aisément que $\overline{\mathrm{Vect} A}$ l'est aussi. Puisqu'il contient $\bar{A}$, on obtient

$$\mathrm{Vect}(\bar{A}) \subset \overline{\mathrm{Vect} A}$$

Exercice 23 : [énoncé]
On a

$$\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \backslash \mathring{A} = \bar{A} \cap C_E \mathring{A} = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$$

On en déduit que $\mathrm{Fr}(A)$ est fermée par intersection de parties fermées

Exercice 24 : [énoncé]
On sait

$$\mathrm{Fr}(F) = \bar{F} \cap \overline{C_E F}$$

donc

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(F)) = \mathrm{Fr}(F) \cap \overline{C_E \mathrm{Fr}(F)}$$

Or $\mathrm{Fr}(F) \subset \bar{F} = F$ donc $C_E F \subset C_E \mathrm{Fr}(F)$ puis $\overline{C_E F} \subset \overline{C_E \mathrm{Fr} F}$.
De plus $\mathrm{Fr} F \subset \overline{C_E F}$ donc $\mathrm{Fr} F \subset \overline{C_E \mathrm{Fr} F}$ puis

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(F)) = \mathrm{Fr}(F)$$

Exercice 25 : [énoncé]
a) Soit $x \in A \cap \bar{B}$. Il existe une suite $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \to x$. Or $x \in A$ et A est ouvert donc à partir d'un certain rang $b_n \in A$. Ainsi pour n assez grand $b_n \in A \cap B$ et puisque $b_n \to x$, $x \in \overline{A \cap B}$.
b) Si $A \cap B = \emptyset$ alors $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B} = \bar{\emptyset} = \emptyset$.

Exercice 26 : [énoncé]
a) Soient $a, b \in \bar{A}$. Il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \to a$ et $b_n \to b$.
Pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda a + (1-\lambda) b = \lim_{n \to +\infty} (\lambda a_n + (1-\lambda) b_n)$$

avec $\lambda a_n + (1-\lambda) b_n \in [a_n, b_n] \subset A$ donc $\lambda a + (1-\lambda) b \in \bar{A}$.
b) Soient $a, b \in A^\circ$. Il existe $\alpha_a, \alpha_b > 0$ tel que $B(a, \alpha_a), B(b, \alpha_b) \subset A$. Posons $\alpha = \min(\alpha_a, \alpha_b) > 0$.
Pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $x \in B(\lambda a + (1-\lambda) b, \alpha)$ on a $x = (\lambda a + (1-\lambda) b) + \alpha u$ avec $u \in B(0,1)$.
$a' = a + \alpha u \in B(a, \alpha) \subset A$ et $b' = b + \alpha u \in B(b, \alpha) \subset A$ donc $[a', b'] \subset A$ puisque A est convexe donc $\lambda a' + (1-\lambda) b' = x \in A$. Ainsi $B(\lambda a + (1-\lambda) b, \alpha) \subset A$ et donc $\lambda a + (1-\lambda) b \in A^\circ$. Finalement A° est convexe.

Exercice 27 : [énoncé]
$A \subset \bar{A}$, $B \subset \bar{B}$ donc $d(\bar{A}, \bar{B}) \leqslant d(A, B)$.
Pour tout $x \in \bar{A}$ et $y \in \bar{B}$, il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \to x$ et $b_n \to y$.
On a alors $d(x, y) = \lim_{n \to +\infty} d(a_n, b_n)$ or $d(a_n, b_n) \geqslant d(A, B)$ donc à la limite $d(x, y) \geqslant d(A, B)$ puis $d(\bar{A}, \bar{B}) \geqslant d(A, B)$ et finalement l'égalité.

Exercice 28 : [énoncé]

a) $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ est un fermé qui contient $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ donc $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $A_j \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$ et $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$ est fermé donc $\overline{A_j} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$ puis $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$.

b) $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ est un fermé qui contient $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ donc $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Il ne peut y avoir égalité : pour $A_1 = \mathbb{Q}$, $A_2 = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ on a $\overline{A_1 \cap A_2} = \emptyset$ et $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \mathbb{R}$.

Exercice 29 : [énoncé]

Pour tout $x \in A$, $x \in \bar{A}$ et donc $|f(x)| \leqslant \|f\|_{\infty,\bar{A}}$. Ainsi

$$\|f\|_{\infty,A} \leqslant \|f\|_{\infty,\bar{A}}$$

Soit $x \in \bar{A}$, il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to x$ et alors $f(u_n) \to f(x)$ par continuité de f. Or $|f(u_n)| \leqslant \|f\|_{\infty,A}$ donc à la limite $|f(x)| \leqslant \|f\|_{\infty,A}$ puis

$$\|f\|_{\infty,\bar{A}} \leqslant \|f\|_{\infty,A}$$

Exercice 30 : [énoncé]

Commençons par montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable, on peut donc écrire $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$. Posons alors pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on pose $A_p = P(T + D_p)P^{-1}$ avec $D_p = \mathrm{diag}(1/p, 2/p, \dots, n/p)$.

Par opérations, $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$ et pour p assez grand les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire $T + D_p$ sont deux à deux distincts, ce qui assure $A_p \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Ainsi $A \in \overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})}$ et donc $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrons maintenant que l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est formée des matrices possédant exactement n valeurs propres distinctes.

Soit $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Cas $|\mathrm{Sp}A| < n$.

On peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Posons alors $D_p = D + \begin{pmatrix} 0 & 1/p & & \\ 0 & 0 & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & 0 \end{pmatrix}$ et $A_p = PD_pP^{-1}$.

La matrice D_p n'est pas diagonalisable car $\dim E_\lambda(D_p) < m_\lambda(D_p)$ donc A_p non plus et puisque$A_p \to A$, on peut affirmer que la matrice A n'est pas intérieure à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Cas $|\mathrm{Sp}A| = n$.

Supposons par l'absurde que A n'est pas intérieur à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$. Il existe donc une suite (A_p) de matrices non diagonalisables convergeant vers A. Puisque les matrices A_p ne sont pas diagonalisables, leurs valeurs propres ne peuvent être deux à deux distinctes. Notons λ_p une valeur propre au moins double de A_p. Puisque $A_p \to A$, par continuité du déterminant $\chi_{A_p} \to \chi_A$. Les coefficients du polynôme caractéristique χ_{A_p} sont donc bornés ce qui permet d'affirmer que les racines de χ_{A_p} le sont aussi (car si ξ est racine de $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, on a $|\xi| \leqslant \max(1, |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|)$). La suite complexe (λ_p) étant bornée, on peut en extraire une suite convergente $(\lambda_{\varphi(p)})$ de limite λ. On a alors $A_p - \lambda_{\varphi(p)}I_n \to A - \lambda I_n$. Or les valeurs propres de A étant simples, on a $\dim\ker(A - \lambda I_n) \leqslant 1$ et donc $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geqslant n - 1$. La matrice $A - \lambda I_n$ possède donc un déterminant extrait non nul d'ordre $n - 1$. Par continuité du déterminant, on peut affirmer que pour p assez grand $\mathrm{rg}(A_{\varphi(p)} - \lambda_{\varphi(p)}I_n) \geqslant n - 1$ et donc $\dim\ker(A_{\varphi(p)} - \lambda_{\varphi(p)}I_n) \leqslant 1$ ce qui contredit la multiplicité de la valeur propre $\lambda_{\varphi(p)}$. C'est absurde et on conclut que la matrice A est intérieure à $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 31 : [énoncé]

a) Si A est fermée alors $\bar{A} = A$ donc $\mathrm{Fr}A = A\backslash A^\circ \subset A$.

Inversement, si $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A}\backslash A^\circ \subset A$ alors puisque $A^\circ \subset A$ on a $\bar{A} \subset A$.

En effet, pour $x \in \bar{A}$, si $x \in A^\circ$ alors $x \in A$ et sinon $x \in \mathrm{Fr}A$ et donc $x \in A$.

Puisque de plus $A \subset \bar{A}$, on en déduit $A = \bar{A}$ et donc $\bar{A}$ est fermé.

b) A est un ouvert si, et seulement si, C_EA est un fermé i.e. si, et seulement si, $\mathrm{Fr}(C_EA) \subset C_EA$.

Or $\mathrm{Fr}(C_EA) = \mathrm{Fr}A$ donc A est un ouvert si, et seulement si, $\mathrm{Fr}A \cap A = \emptyset$.

Exercice 32 : [énoncé]

a) Une matrice de $\mathcal{R}$ est annulée par un polynôme de la forme $X^n - 1$ dont les racines sont de module 1. Puisque les valeurs propres figurent parmi les racines des polynômes annulateurs

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{U}$$

b) Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres comptées avec multiplicité λ, μ. Celles-ci sont déterminées comme les solutions du système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \mathrm{tr}M \\ \lambda\mu = \det M \end{cases}$$

Pour alléger les notations, posons $p = (\mathrm{tr} M)/2$ et $q = \det M$. Les valeurs propres λ et μ sont les deux racines du polynôme

$$X^2 - pX + q$$

et en posant $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = p^2 - q$, ces racines sont

$$\lambda = p + \delta \text{ et } \mu = p - \delta$$

de sorte que

$$|\lambda|^2 = |p|^2 + |\delta|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{p}\delta) \text{ et } |\mu|^2 = |p|^2 + |\delta|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{p}\delta)$$

On en déduit que la fonction f qui à $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ associe le réel
$\left(|\lambda|^2 - 1\right)^2 \left(|\mu|^2 - 1\right)^2$ s'exprime comme somme, produit et conjuguée des $\mathrm{tr} M$ et $\det M$ et c'est donc une fonction continue.
Puisque $\mathcal{U} = f^{-1}(\{0\})$ avec $\{0\}$ fermé, $\mathcal{U}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
c) Soit $M \in \mathcal{U}$. La matrice M est trigonalisable et donc il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_2^+(\mathbb{C})$ telle que

$$M = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \mu \end{pmatrix},\ |\lambda| = |\mu| = 1$$

On peut écrire $\lambda = \mathrm{e}^{i\alpha}$ et $\mu = \mathrm{e}^{i\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, posons

$$\alpha_n = 2\pi \frac{[n\alpha/2\pi]}{n} \text{ et } \beta_n = 2\pi \frac{[n\beta/2\pi] + 1}{n}$$

et considérons la matrice

$$M_n = PT_nP^{-1} \text{ avec } T_n = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\alpha_n} & \nu \\ 0 & \mathrm{e}^{i\beta_n} \end{pmatrix}$$

Par construction,

$$\mathrm{e}^{i\alpha_n} \neq \mathrm{e}^{i\beta_n}$$

au moins pour n assez grand et ce même lorsque $\alpha = \beta$.
On en déduit que pour ces valeurs de n la matrice T_n est diagonalisable.
De plus, puisque

$$\left(\mathrm{e}^{i\alpha_n}\right)^n = \left(\mathrm{e}^{i\beta_n}\right)^n = 1$$

on a alors $T_n^n = I_2$ et donc $M_n \in \mathcal{R}$.
Enfin, on a évidemment $M_n \to M$.
d) $\mathcal{U}$ est un fermé contenant $\mathcal{R}$ donc $\bar{\mathcal{R}} \subset \mathcal{U}$ et par double inclusion $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{U}$.

Exercice 33 : [énoncé]
La fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - x^2 - y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $U = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert relatif de $\mathbb{R}^2$ car image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Or un ouvert relatif à $\mathbb{R}^2$ n'est autre qu'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 34 : [énoncé]
L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est polynomiale en les coefficients matriciels, elle est donc continue. Puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^\star$ par cette application continue, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 35 : [énoncé]
Par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(x, y) \text{ est libre } \Leftrightarrow |(x \mid y)| < \|x\| \|y\|$$

Considérons l'application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \|x\| \|y\| - (x \mid y)$$

L'ensemble $\left\{(x, y) \in E^2/(x, y) \text{ libre}\right\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert car image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.

Exercice 36 : [énoncé]
Soit $A \in R_p$. La matrice A possède un déterminant extrait non nul d'ordre p. Par continuité du déterminant, au voisinage de A, toute matrice à ce même déterminant extrait non nul et est donc de rang supérieur à p. Ainsi la matrice A est intérieure à R_p.

Exercice 37 : [énoncé]
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons f continue et introduisons $A \subset E$. Tout élément y de $f(\bar{A})$ est l'image par f de la limite x d'une suite convergente (x_n) d'éléments de A. Or f étant continue, $f(x_n) \to y$ et donc y est limite d'une suite d'élément de $f(A)$. Ainsi $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons (ii) et introduisons $B \subset F$. Pour $A = f^{-1}(B)$, on a $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \bar{B}$ donc $\bar{A} \subset f^{-1}(\bar{B})$ c'est à dire

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons (iii) et introduisons $B \subset F$. On remarque la propriété $f^{-1}(C_F B) = C_E f^{-1}(B)$ et donc

$$f^{-1}(B^\circ) = f^{-1}(C_F \overline{(C_F B)}) = C_E f^{-1}(\overline{C_F B}) \subset C_E \overline{f^{-1}(C_F B)} = \left(C_E f^{-1}(C_F B)\right)^\circ = \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons (iv). Pour tout $a \in A$ et tout $\varepsilon > 0$, $B(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de F dont

$$f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \subset \left(f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))\right)^\circ$$

Or $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ donc $a \in \left(f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))\right)^\circ$. Par conséquent, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$B(a, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

Ainsi nous obtenons

$$\forall a \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E,\ x \in B(a, \alpha) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$$

ce qui correspond à la continuité de f.

Exercice 38 : [énoncé]
Si u est continue alors

$$A = \{x \in E / \|u(x)\| = 1\} = f^{-1}(\{1\})$$

est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $f = \|\,.\,\| \circ u$. La partie A est donc un fermé relatif à E, c'est donc une partie fermée.
Inversement, si u n'est pas continu alors l'application u n'est par bornée sur $\{x \in E / \|x\| = 1\}$. Cela permet de construire une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\|x_n\| = 1 \text{ et } \|u(x_n)\| > n$$

En posant

$$y_n = \frac{1}{\|u(x_n)\|} x_n$$

on obtient une suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant $y_n \to 0$.
Or $0 \notin A$ donc la partie A n'est pas fermée.

Exercice 39 : [énoncé]
Si la forme linéaire est continue assurément son noyau est fermé car image réciproque du fermé $\{0\}$.
Inversement, supposons que φ est une forme linéaire discontinue.
Pour tout $k \in \mathbb{R}^+$, il existe alors $x \in E$ tel que

$$|\varphi(x)| > k \|x\|$$

En prenant $k = n \in \mathbb{N}$, on définit ainsi une suite (x_n) d'éléments de E vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi(x_n)| > n \|x_n\|$$

Posons alors

$$y_n = \frac{1}{\varphi(x_n)} x_n$$

On a par construction $\varphi(y_n) = 1$ et $\|y_n\| \leqslant 1/n$ donc $y_n \to 0_E$.
Considérons enfin

$$z_n = y_0 - y_n$$

On a $\varphi(z_n) = 0$ et donc $z_n \in \ker \varphi$. Or

$$z_n \to y_0$$

avec $y_0 \notin \ker \varphi$. Ainsi $\ker \varphi$ n'est pas fermé car ne contient pas toutes les limites de ses suites convergentes.

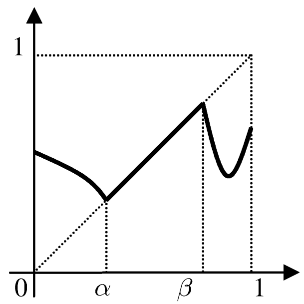
Exercice 40 : [énoncé]
a) Notons

$$A = \{x \in [0,1] / f(x) = x\}$$

On a évidemment $A \subset \mathrm{Im} f$, mais inversement, pour $x \in \mathrm{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x$$

Ainsi $\mathrm{Im} f \subset A$, puis, par double inclusion, $A = \mathrm{Im} f$.
On en déduit que A est un segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha, \beta]$ car image d'un compact par une fonction réelle continue.
b) Une fonction f d'allure suivante convient



c) Soit f solution dérivable.
Si $\alpha = \beta$ alors f est constante égale à cette valeur commune.
Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha, \beta]$.
Par suite, si $\alpha > 0$, f prend des valeurs strictement inférieur à α ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$.
De même on obtient $\beta = 1$ et on conclut $f : x \in [0,1] \mapsto x$.

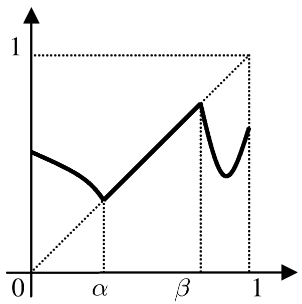
Exercice 41 : [énoncé]
a) Soit f solution. Formons

$$A = \{x \in [0,1] \,/\, f(x) = x\}$$

On a évidemment $A \subset \operatorname{Im} f$, mais inversement, pour $x \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x$$

Ainsi $\operatorname{Im} f \subset A$, puis, par double inclusion, $A = \operatorname{Im} f$.
On en déduit que A est un segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha, \beta]$ car image d'un compact par une fonction réelle continue.
Pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $f(x) = x$ et pour tout $x \in [0, \alpha[\cup]\beta, 1]$, $f(x) \in [\alpha, \beta]$.
Inversement, une fonction continue vérifiant les deux conditions précédente est solution.
Cela peut apparaître sous la forme d'une fonction ayant l'allure suivante



b) Soit f solution dérivable.
Si $\alpha = \beta$ alors f est constante égale à cette valeur commune.
Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha, \beta]$.
Par suite, si $\alpha > 0$, f prend des valeurs strictement inférieur à α ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$.
De même on obtient $\beta = 1$ et on conclut $f : x \in [0,1] \mapsto x$.

Exercice 42 : [énoncé]
a) Par télescopage

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right) \circ (u - \mathrm{Id}) = u^{n+1} - \mathrm{Id}$$

donc

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id}) = \frac{1}{(n+1)} \left(u^{n+1} - \mathrm{Id}\right)$$

b) Soit $x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \ker(u - \mathrm{Id})$. On peut écrire $x = u(a) - a$ et on a $u(x) = x$.
On en déduit

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = x$$

Or

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1}(a) - a\right) \to 0$$

car

$$\left\|u^{n+1}(a) - a\right\| \leqslant \left\|u^{n+1}(a)\right\| + \|a\| \leqslant 2\|a\|$$

On en déduit $x = 0$.
c) Par la formule du rang

$$\dim \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) + \dim \ker(u - \mathrm{Id}) = \dim E$$

et puisque les deux espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires.
d) Soit $z \in E$. On peut écrire $z = x + y$ avec $x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$ et $y \in \ker(u - \mathrm{Id})$.
On a alors $v_n(z) = v_n(x) + y$ avec, comme dans l'étude du b), $v_n(x) \to 0$. On en déduit $v_n(z) \to y$.
Ainsi la suite de fonctions (v_n) converge simplement vers la projection p sur $\ker(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Puisque pour tout $x \in E$, on a

$$\|v_n(x)\| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left\|u^k(x)\right\| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|x\| = \|x\|$$

on obtient à la limite $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. On en déduit que la projection p est continue puis que $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) = \ker p$ est une partie fermée.
e) Supposons la convergence simple de la suite de fonctions (v_n) et la fermeture de $\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Soit $z \in E$. Posons $y = \lim_{n \to +\infty} v_n(z)$ et $x = z - y$.
D'une part, puisque

$$u(v_n(z)) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^{k+1}(z) = v_n(z) + \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1}(z) - z\right)$$

on obtient à la limite
$$u(y) = y$$
car l'application linéaire u est continue et $\left\|u^{n+1}(z)\right\| \leqslant \|z\|$. On en déduit $y \in \ker(u - \mathrm{Id})$.
D'autre part
$$z - v_n(z) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{Id} - u^k)(z)\right)$$
et
$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - u^k) = \mathrm{Im}\left((\mathrm{Id} - u) \circ \sum_{\ell=0}^{k-1} u^{\ell-1}\right) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - u) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$$
donc $z - v_n(z) \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. On en déduit $x = \lim(z - v_n(z)) \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ car $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est fermé.
Finalement, on a écrit $z = x + y$ avec
$$x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \text{ et } y \in \ker(u - \mathrm{Id})$$

Exercice 43 : [énoncé]
On note U l'ensemble des polynômes considérés.
Soit $P \in U$. En notant $x_1 < \ldots < x_n$ ses racines, on peut écrire
$$P = \lambda(X - x_1)\ldots(X - x_n)$$
avec $\lambda \neq 0$. Pour fixer les idées, supposons $\lambda > 0$ (il est facile d'adapter la démonstration qui suit au cas $\lambda < 0$)
Posons $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.
Posons aussi $y_0 \in \left]-\infty, x_1\right[$ et $y_n \in \left]x_n, +\infty\right[$.
$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}$,..., $P(y_{n-1})$ est du signe de (-1), $P(y_n)$ du signe de $+1$.
Considérons maintenant l'application
$$f_i : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(y_i)$$
L'application f_i est continue et donc $f_i^{-1}(\pm\mathbb{R}^{+\star})$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.
Considérons V l'intersection des
$$f_0^{-1}\left((-1)^n\mathbb{R}^{+\star}\right), f_1^{-1}\left((-1)^{n-1}\mathbb{R}^{+\star}\right), \ldots, f_n^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$$
Les éléments de V sont des polynômes réels alternant de signe entre $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $V \subset U$. Or $P \in V$ et V est ouvert donc V est voisinage de P puis U est voisinage de P.
Au final U est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.

Exercice 44 : [énoncé]
Soit $P \in O_n$. En notant $x_1 < \ldots < x_n$ ses racines, on peut écrire
$$P = \alpha(X - x_1)\ldots(X - x_n)$$
avec $\alpha \neq 0$.
Posons $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.
Posons aussi $y_0 \in \left]-\infty, x_1\right[$ et $y_n \in \left]x_n, +\infty\right[$.
$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n\alpha$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}\alpha$,..., $P(y_{n-1})$ est du signe de $(-1)\alpha$, $P(y_n)$ du signe de α. Pour simplifier l'exposé de ce qui suit, on va supposer $\alpha > 0$. La résolution se transposera aisément au cas $\alpha < 0$.
Considérons l'application
$$f_i : Q \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto Q(y_i)$$
L'application f_i est continue et donc $f_j^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$ et $f_j^{-1}(\mathbb{R}^{-\star})$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}_n[X]$.
Considérons U l'intersection des ouverts
$$f_0^{-1}\left((-1)^n\mathbb{R}^{+\star}\right), f_1^{-2}\left((-1)^{n-1}\mathbb{R}^{+\star}\right), \ldots, f_n^{-1}(\mathbb{R}^{+\star})$$
Les éléments de U sont des polynômes réels alternant de signe entre $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $U \subset O_n$. Or $P \in U$ et U est ouvert donc U est voisinage de P puis O_n est voisinage de P.
Au final O_n est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.
Dans le cas $n = 1$: $F_n = O_n$ et donc F_n est ouvert.
Dans le cas $n = 2$: F_n réunit les polynômes $P = aX^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4ac > 0$ (que a soit égal à 0 ou non). L'application $P \mapsto b^2 - 4ac$ étant continue, on peut affirmer que F_n est encore ouvert car image réciproque d'un ouvert pas une application continue.
Dans le cas $n \geqslant 3$: $P_n = X(1 + X^2/n)$ est une suite de polynômes non scindés convergeant vers X scindé à racines simples. Par suite F_n n'est pas ouvert.

Exercice 45 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons f discontinue en $a \in \mathbb{R}$. On peut alors construire une suite (x_n) vérifiant
$$x_n \to a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon$$
avec $\varepsilon > 0$ fixé.

Soit $n \in \mathbb{N}$, puisque $f([a, x_n])$ est un segment contenant $f(a)$ et $f(x_n)$, il contient aussi l'intermédiaire $f(a) \pm \varepsilon$ (le $\pm$ étant déterminé par la position relative de $f(x_n)$ par rapport à $f(a)$). Il existe donc a_n compris entre a et x_n vérifiant

$$|f(a_n) - f(a)| = \varepsilon$$

La suite (a_n) évolue dans le fermé $f^{-1}(\{f(a) + \varepsilon\}) \cup f^{-1}(\{f(a) - \varepsilon\})$ et converge vers a donc $a \in f^{-1}(\{f(a) + \varepsilon\}) \cup f^{-1}(\{f(a) - \varepsilon\})$ ce qui est absurde.

Exercice 46 : [énoncé]
Considérons l'application $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ déterminée par $\varphi(f) = f^2 - f$.
L'application φ est continue par opérations sur les fonctions continues, notamment parce que l'application $f \mapsto f \circ f$ est continue (elle s'obtient à partir du produit dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$).
Puisque $\{\tilde{0}\}$ est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble $\mathcal{P} = \varphi^{-1}(\{\tilde{0}\})$ est un fermé relatif à $\mathcal{L}(E)$, donc un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 47 : [énoncé]
L'application $\lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$ est polynomiale non nulle en λ donc possède un nombre fini de racine.
Par suite : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \alpha > 0, B(A, \alpha) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Exercice 48 : [énoncé]
a) Soient $u, v \in \bar{F}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $(u_n), (v_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \to u$ et $v_n \to v$.
Comme $\lambda u_n + \mu v_n \to \lambda u + \mu v$ et $\lambda u_n + \mu v_n \in F$ on a $\lambda u + \mu v \in \bar{F}$.
b) Soit H un hyperplan de E.
Si $\bar{H} = H$ alors H est fermé.
Sinon alors $\bar{H}$ est un sous-espace vectoriel de E, contenant H et distinct de H.
Puisque H est un hyperplan $\exists a \notin H$ tel que $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$.
Soit $x \in \bar{H} \backslash H$. On peut écrire $x = h + \lambda a$ avec $h \in H$ et $\lambda \neq 0$. Par opération $a \in \bar{H}$ et puisque $H \subset \bar{H}$ on obtient $E \subset \bar{H}$. Finalement $\bar{H} = E$ et donc H est dense.

Exercice 49 : [énoncé]
a) Pour tout $a \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$ car U est dense.
Soit $x \in B(a, \varepsilon) \cap U$. Puisque $B(a, \varepsilon) \cap U$ est ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset B(a, \varepsilon) \cap U$ et puisque V est dense $B(x, \alpha) \cap V \neq \emptyset$. Par suite

$$B(a, \varepsilon) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$$

b) Soient F et G deux fermés d'intérieurs vides.

$$C_E(F \cup G)^\circ = \overline{C_E(F \cup G)} = \overline{C_E F \cap C_E G}$$

avec $C_E F$ et $C_E G$ ouverts denses donc

$$\overline{C_E F \cap C_E G} = E$$

puis

$$(F \cup G)^\circ = \emptyset$$

Exercice 50 : [énoncé]
a) Posons

$$A = \{n \geqslant n_0 / a \geqslant u_n\}$$

A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $n_0 \in A$ et majorée car $u_n \to +\infty$.
La partie A admet donc un plus grand élément $n \geqslant n_0$ et pour celui-ci $u_n \leqslant a < u_{n+1}$.
Par suite $|u_n - a| \leqslant |u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$ car $n \geqslant n_0$.
b) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Puisque $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$.
Puisque $v_n \to +\infty$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x + v_p \geqslant u_{n_0}$.
Par l'étude précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - (x + v_p)| \leqslant \varepsilon$ i.e. $|(u_n - v_p) - x| \leqslant \varepsilon$.
Par suite l'ensemble $\{u_n - v_p / n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
c) Remarquons que

$$A = \{\cos(\ln n) / n \in \mathbb{N}^\star\} = \{\cos(\ln(n+1) - 2p\pi) / n, p \in \mathbb{N}\}$$

Posons $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = 2n\pi$. Les hypothèses précédentes sont réunies et donc

$$B = \{u_n - v_p / n, p \in \mathbb{N}\} = \{\ln(n+1) - 2p\pi / n, p \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.
Soient $x \in [-1, 1]$ et $\theta = \arccos x$.
Par densité, il existe une suite (θ_n) d'éléments de B convergeant vers θ et, par continuité de la fonction cosinus, la suite (x_n) de terme général $x_n = \cos(\theta_n)$ converge vers $x = \cos\theta$.
Or cette suite (x_n) est une suite d'éléments de $\cos(B) = A$ et donc A est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 51 : [énoncé]
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que $1/n_0 \leqslant \varepsilon$.
Pour $a \geqslant \ln n_0$ et $n = E(\mathrm{e}^a) \geqslant n_0$, on a $\ln n \leqslant a \leqslant \ln(n+1)$.
On en déduit

$$|a - \ln n| \leqslant \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) \leqslant 1/n \leqslant 1/n_0 \leqslant \varepsilon$$

Puisque $m - x \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$, pour m assez grand, on a $a = m - x \geqslant \ln n_0$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $|a - \ln n| \leqslant \varepsilon$ i.e.

$$|m - \ln n - x| \leqslant \varepsilon$$

Par suite $\{m - \ln n/(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 52 : [énoncé]
a) Il existe $h \in H$ tel que $h \neq 0$ car H n'est pas réduit à $\{0\}$.
Si $h > 0$ alors $h \in \{x \in H/x > 0\}$. Si $h < 0$ alors $-h \in \{x \in H/x > 0\}$.
Dans les deux cas $\{x \in H/x > 0\} \neq \emptyset$. De plus $\{x \in H/x > 0\} \subset \mathbb{R}$ et $\{x \in H/x > 0\}$ est minoré par 0 donc $a = \inf \{x \in H/x > 0\}$ existe dans $\mathbb{R}$.
b) On suppose $a > 0$.
Si $a \notin H$ alors il existe $x, y \in H$ tel que $a < x < y < 2a$ et alors $y - x$ est élément de H et vérifie $0 < y - x < a$ ce qui contredit la définition de a. C'est absurde.
$a \in H$ donc $a\mathbb{Z} = < a > \subset H$.
Inversement, soit $x \in H$. On peut écrire $x = aq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$, $r \in [0, a[$ (en fait $q = E(x/a)$ et $r = x - aq$)
Puisque $r = x - aq$ avec $x \in H$ et $aq \in a\mathbb{Z} \subset H$ on a $r \in H$.
Si $r > 0$ alors $r \in \{x \in H/x > 0\}$ et $r < a$ contredit la définition de a.
Il reste $r = 0$ et donc $x = aq$. Ainsi $H \subset a\mathbb{Z}$ puis l'égalité.
c) Puisque $\inf \{x \in H/x > 0\} = 0$, on peut affirmer que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \alpha$.
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Montrons $H \cap B(a, \alpha) \neq \emptyset$ i.e. $H \cap]a - \alpha, a + \alpha[\neq \emptyset$
Il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \alpha$. Posons $n = E(a/x)$. On a $a = nx + r$ avec $0 \leqslant r < \alpha$.
$nx \in < x > \subset H$ et $|a - nx| = r < \alpha$ donc $nx \in H \cap B(a, \alpha)$ et donc $H \cap B(a, \alpha) \neq \emptyset$.
Ainsi H est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 53 : [énoncé]
a) $\{\cos(n)/n \in \mathbb{N}\} = \{\cos(n)/n \in \mathbb{Z}\} = \{\cos(n + 2k\pi)/n, k \in \mathbb{Z}\} = \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$
Puisque $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et c'est un sous-groupe dense car il n'est pas monogène puisque π n'est pas rationnel ; c'est en effet un résultat classique bien que en dehors du programme, les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sont monogènes ou denses.
Pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos \theta = x$ et puisque $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ convergeant vers θ. L'image de cette suite par la fonction continue cosinus détermine une suite d'élément de $\{\cos(n)/n \in \mathbb{N}\}$ convergeant vers x.
b) En notant que les 2^p avec $p \in \mathbb{N}$ sont des naturels non nuls, on observe

$$\{\cos(p \ln 2)/p \in \mathbb{N}\} \subset \{\cos(\ln n)/n \in \mathbb{N}^\star\}$$

Ainsi

$$\cos(\ln 2.\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}) \subset \{\cos(\ln n)/n \in \mathbb{N}^\star\}$$

Si π et $\ln 2$ ne sont pas commensurables, on peut conclure en adaptant la démarche précédente.
Si en revanche π et $\ln 2$ sont commensurables (ce qui est douteux. . .), on reprend l'idée précédente avec $\ln 3$ au lieu de $\ln 2$.
Assurément π et $\ln 3$ ne sont pas commensurables car s'ils l'étaient, $\ln 2$ et $\ln 3$ le seraient aussi ce qui signifie qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $p \ln 2 = q \ln 3$ soit encore $2^p = 3^q$ ce qui est faux !

Exercice 54 : [énoncé]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La matrice A est trigonalisable donc il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = T$ avec T triangulaire supérieure. Posons alors $T_p = T + \mathrm{diag}(1/p, 2/p, \ldots, n/p)$ et $A_p = PT_pP^{-1}$. Il est immédiat que $T_p \to T$ quand $p \to +\infty$ et donc $A_p \to A$. De plus, pour p assez grand, la matrice T_p est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux deux à deux distincts, cette matrice admet donc n valeurs propres et est donc diagonalisable. Il en est de même pour A_p qui lui est semblable. Ainsi toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Exercice 55 : [énoncé]
1ère méthode (nécessitant quelques résultats non triviaux mais intuitifs sur la codimension)
Par définition, un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de codimension 1. Son adhérence $\bar{H}$ est aussi un sous-espace vectoriel et, puisque contenant H, sa codimension vaut 0 ou 1.
Si $\bar{H}$ est de codimension 0 alors $\bar{H} = E$ ce qui signifie que H est dense dans E.

Si $\bar{H}$ est de codimension 1, puisque $\bar{H}$ contient l'hyperplan H, on a $\bar{H} = H$ et donc $\bar{H}$ est fermé.
2ème méthode (plus élémentaire)
Par définition un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de codimension 1. Il existe donc un vecteur $a \in E$ non nul vérifiant

$$H \oplus \text{Vect}(a) = E$$

Supposons que H ne soit pas fermé. Il existe alors une suite (x_n) d'éléments de H convergeant vers un élément x n'appartenant pas à H. On peut écrire

$$x = h + \lambda a \text{ avec } h \in H \text{ et } \lambda \neq 0$$

En considérant

$$y_n = \frac{1}{\lambda}(x_n - h)$$

on construit une suite (y_n) d'éléments de H convergeant vers a.
Il est désormais facile d'établir que H est dense dans E. En effet pour $z \in E$, on peut écrire

$$z = k + \mu a$$

avec $k \in H$ et $\mu \in \mathbb{R}$ de sorte que la suite de terme général

$$z_n = k + \mu y_n$$

est une suite d'éléments de H convergeant vers z.

Exercice 56 : [énoncé]
a) Soit u une suite sommable. On a

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| \to 0$$

donc pour tout $\alpha > 0$, il existe N tel que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n| < \alpha$$

Considérons alors v définie par $v_n = u_n$ si $n \leqslant N$ et $v_n = 0$ sinon.
On a $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et $\|v - u\|_1 < \alpha$ donc $B(u, \alpha) \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \neq \emptyset$.
b) Non, en notant u la suite constante égale à 1, $B_\infty(u, 1/2) \cap \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \emptyset$.

Exercice 57 : [énoncé]
Soit f une fonction élément de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A vérifiant

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

Considérons alors la fonction $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = 1$ pour $t \in [0, A]$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \geqslant A + 1$ et $\varphi(t) = 1 - (t - A)$ pour $t \in [A, A + 1]$. La fonction $f\varphi$ est éléments de E_0 et

$$\|f - f\varphi\|_2 \leqslant \sqrt{\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi E_0 est dense dans E.
Pour montrer maintenant que F est dense dans E, nous allons établir que F est dense dans E_0.
Soit f une fonction élément de E_0. Remarquons

$$\int_0^{+\infty} \left(f(t) - P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)^2 \mathrm{d}t \underset{u=\mathrm{e}^{-t}}{=} \int_0^1 \left(f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2} - P(u)\right)^2 \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\mathrm{d}u$$

La fonction $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $\sqrt{u}\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 0$.
La fonction $g : u \mapsto f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2}$ peut-être prolongée par continuité en 0 car f est nulle en dehors d'un segment. Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\|g - P\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \varepsilon$ et pour $\varphi : t \mapsto P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}$ on a alors

$$\|f - \varphi\|_2 \leqslant \lambda\varepsilon \text{ avec } \lambda = \sqrt{\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\,\mathrm{d}u}$$

Cela permet de conclure à la densité proposée.

Exercice 58 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $A \neq E$.
Il existe un élément $a \in E$ tel que $a \notin A$. Par translation du problème, on peut supposer $a = 0$.
Posons $n = \dim E$.
Si $\text{Vect}(A)$ est de dimension strictement inférieure à n alors A est inclus dans un hyperplan de E et son adhérence aussi. C'est absurde car cela contredit la densité de A.

Si Vect(A) est de dimension n, on peut alors considérer $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E formée d'éléments de A.
Puisque $0\notin A$, pour tout $x\in A$, on remarque : $\forall\lambda\in\mathbb{R}^-, -\lambda x\notin A$ (car sinon, par convexité, $0\in A$).
Par convexité de A : $\forall\lambda_1,\dots,\lambda_n\geqslant 0, \lambda_1+\dots+\lambda_n=1\Rightarrow\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n\in A$ et donc : $\forall\lambda\in\mathbb{R}^-,\forall\lambda_1,\dots,\lambda_n\geqslant 0,\lambda_1+\dots+\lambda_n=1\Rightarrow\lambda(\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n)\notin A$.
Ainsi $\forall\mu_1,\dots,\mu_n\leqslant 0,\mu_1e_1+\dots+\mu_ne_n\notin A$.
Or la partie $\{\mu_1e_1+\dots+\mu_ne_n/\mu_i<0\}$ est un ouvert non vide de A et donc aucun de ses éléments n'est adhérent à A. Cela contredit la densité de A.

Exercice 59 : [énoncé]
Soient $a<b\in A$.
Puisque $a,b\in A$, $\frac{a+b}{2}\in A$, puis $\frac{3a+b}{4}=\frac{a+(a+b)/2}{2}\in A$ et $\frac{a+3b}{4}\in A$ etc.
Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, montrons $\forall k\in\{0,\dots,2^n\}, \frac{ka+(2^n-k)b}{2^n}\in A$.
La propriété est immédiate pour $n=0$.
Supposons la propriété vraie au rang $n\geqslant 0$.
Soit $k\in\left\{0,\dots,2^{n+1}\right\}$.
Cas k pair :
$k=2k'$ avec $k'\in\{0,\dots,2^n\}$ et $\frac{ka+(2^{n+1}-k)b}{2^{n+1}}=\frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n}\in A$ en vertu de l'hypothèse de récurrence.
Cas k impair :
$k=2k'+1$ avec $k'\in\{0,\dots,2^n-1\}$ et

$$\frac{ka+(2^{n+1}-k)b}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n}+\frac{(k'+1)a+(2^n-(k'+1))b}{2^n}\right)\in A$$

car par hypothèse de récurrence

$$\frac{k'a+(2^n-k')b}{2^n},\frac{(k'+1)a+(2^n-(k'+1))b}{2^n}\in A$$

La récurrence est établie.
Soit $x\in\,]\inf A,\sup A[$.
Il existe $a,b\in A$ tel que $x\in[a,b]$ ce qui permet d'écrire $x=\lambda a+(1-\lambda)b$.
Soit $k_n=E(2^n\lambda)$ et $x_n=\frac{k_na+(2^n-k_n)b}{2^n}$.
On vérifie aisément que $x_n\to x$ car $2^nk\to\lambda$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $x_n\in A$
Ainsi A est dense dans $]\inf A,\sup A[$.

Exercice 60 : [énoncé]
Considérons l'ensemble $B=\ln A=\{\ln a/a\in A\}$.
Pour tout $x,y\in B$, $\frac{x+y}{2}=\frac{\ln a+\ln b}{2}=\ln\sqrt{ab}\in B$.
En raisonnant par récurrence, on montre que pour tout $x,y\in B$, on a la propriété

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall k\in\{0,\dots,2^n\}, \frac{kx+(2^n-k)y}{2^n}\in B$$

Soit $x\in\,]\inf A,\sup A[$. Il existe $a,b\in A$ tels que $a<x<b$.
On a alors $\ln a<\ln x<\ln b$ avec $\ln a,\ln b\in B$.
On peut écrire $\ln x=\lambda\ln a+(1-\lambda)\ln b$ avec $\lambda\in\,]0,1[$.
Posons alors k_n la partie entière de $\lambda 2^n$ et $x_n=\exp\left(\frac{k_n}{2^n}\ln a+\left(1-\frac{k_n}{2^n}\right)\ln b\right)$
Il est immédiat que $x_n\to x$ avec pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in A$.
Si, dans cette suite, il existe une infinité d'irrationnels, alors x est limite d'une suite d'éléments de $A\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.
Sinon, à partir d'un certain rang, les termes de la suite x_n sont tous rationnels.
Le rapport x_{n+1}/x_n est alors aussi rationnel ; mais

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{k_n}{2^n}}\text{ avec }\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{k_n}{2^n}=0\text{ ou }\frac{1}{2^{n+1}}$$

S'il existe une infinité de n tels que $\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{k_n}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}$ alors il existe une infinité de $n\in\mathbb{N}$ tels que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2^n}}\in\mathbb{Q}$$

et puisque l'élévation au carré d'un rationnel est un rationnel, le nombre a/b est lui-même rationnel. Or les racines carrées itérés d'un rationnel différent de 1 sont irrationnelles à partir d'un certain rang.
Il y a absurdité et donc à parti d'un certain rang $k_{n+1}=2k_n$.
Considérons à la suite (x'_n) définie par

$$x'_n=\exp\left(\frac{k'_n}{2^n}\ln a+\left(1-\frac{k'_n}{2^n}\right)\ln b\right)\text{ avec }k'_n=k_n+1$$

On obtient une suite d'éléments de A, convergeant vers x et qui, en vertu du raisonnement précédent, est formée d'irrationnels à partir d'un certain rang.

Exercice 61 : [énoncé]
$N_\varphi:E\to\mathbb{R}^+$ est bien définie et on vérifie immédiatement

$$N_\varphi(\lambda f)=|\lambda|\,N_\varphi(f)\text{ et }N_\varphi(f+g)\leqslant N_\varphi(f)+N_\varphi(g)$$

Il reste à étudier la véracité de l'implication

$$N_\varphi(f)=0\Rightarrow f=0$$

Supposons : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ dense dans $[0,1]$.
Si $N_\varphi(f)=0$ alors $f\varphi=0$ et donc pour tout $x\in\varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$, on a $f(x)=0$ car $\varphi(x)\neq 0$.
Puisque la fonction continue f est nulle sur la partie $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ dense dans $[0,1]$, cette fonction est nulle sur $[0,1]$.
Supposons : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ non dense dans $[0,1]$.
Puisque le complémentaire de l'adhérence est l'intérieur du complémentaire, la partie $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur non vide et donc il existe $a<b\in[0,1]$ tels que $[a,b]\subset\varphi^{-1}(\{0\})$.
Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)(b-x) & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Cette fonction f est continue sur $[0,1]$, ce n'est pas la fonction nulle mais en revanche la fonction $f\varphi$ est la fonction nulle. Ainsi on a formé un élément f non nul de E tel que $N_\varphi(f)=0$. On en déduit que N_φ n'est pas une norme.

Exercice 62 : [énoncé]
Soit $[a,b]\subset[1,+\infty[$ avec $a<b$. Pour établir la densité de A, montrons que $A\cap[a,b]$ est non vide.
Considérons $q>1$ tel que $qa\leqslant b$.
Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant N\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q$$

Considérons alors

$$E=\left\{m\in\mathbb{N}/m>N \text{ et } \frac{u_m}{u_N}\leqslant b\right\}$$

E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car $N+1\in E$) et majorée (car $u_n\to+\infty$). La partie E possède donc un plus grand élément M. Pour celui-ci, on a

$$\frac{u_M}{u_N}\leqslant b \text{ et } \frac{u_{M+1}}{u_N}>b$$

Or

$$u_{M+1}\leqslant qu_M$$

donc

$$\frac{u_M}{u_N}>\frac{b}{q}\geqslant a$$

Ainsi u_M/u_N est un élément de $A\cap[a,b]$.

Exercice 63 : [énoncé]
Soient $x\in E$ et $r>0$.
Puisque A est une partie dense, $B(a,r)\cap A\neq\emptyset$. On peut donc introduire $x\in B(a,r)\cap A$. Or par intersection d'ouverts, $B(a,r)\cap A$ est aussi une partie ouverte et donc il existe $\alpha>0$ tel que $B(x,\alpha)\subset B(a,r)\cap A$. Puisque la partie B est dense, $B(x,\alpha)\cap B\neq\emptyset$ et finalement $B(a,r)\cap A\cap B\neq\emptyset$.
On peut donc conclure que $A\cap B$ est une partie dense de E.

Exercice 64 : [énoncé]
Soit f une fonction solution.
On a $f(0+0)=f(0)+f(0)$ donc $f(0)=0$
Par une récurrence facile

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}, f(nx)=nf(x)$$

De plus, puisque $f(-x+x)=f(-x)+f(x)$, on a $f(-x)=-f(x)$.
Par suite

$$\forall n\in\mathbb{Z},\forall x\in\mathbb{R}, f(nx)=nf(x)$$

Pour $x=p/q\in\mathbb{Q}$, $f(x)=pf(1/q)$ et $f(1)=qf(1/q)$ donc $f(x)=ax$ avec $a=f(1)$.
Les fonctions $x\mapsto f(x)$ et $x\mapsto ax$ sont continues et coïncident sur $\mathbb{Q}$ partie dense dans $\mathbb{R}$ donc ces deux fonctions sont égales sur $\mathbb{R}$.
Au final f est une fonction linéaire.
Inversement, une telle fonction est évidemment solution.

Exercice 65 : [énoncé]
a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Puisque

$$u_n=\frac{\lfloor 2^n x\rfloor}{2^n}\to x$$

avec $u_n\in\mathcal{D}$, la partie $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
b) Supposons que f s'annule en 0 et 1.

$$\frac{1}{2}\left(f(-x)+f(x)\right)=f(0)$$

donc la fonction$f$ est impaire.
Par récurrence double, montrons $\forall n\in\mathbb{N}, f(n)=0$.
Pour $n=0$ ou $n=1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs $n\geqslant 1$ et $n-1\geqslant 0$.

$$\frac{f(n+1)+f(n-1)}{2}=f(n)$$

donne en vertu de l'hypothèse de récurrence : $f(n+1)=0$.
Récurrence établie.
Par l'imparité
$$\forall p\in\mathbb{Z}, f(p)=0$$
Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, montrons
$$\forall p\in\mathbb{Z}, f\left(\frac{p}{2^n}\right)=0$$
Pour $n=0$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n\in\mathbb{Z}$.
Soit $p\in\mathbb{Z}$,
$$f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{1}{2}\left(0+\frac{p}{2^n}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(f(0)+f\left(\frac{p}{2^n}\right)\right)\underset{HR}{=}0$$
Récurrence établie.
Puisque f est continue et nulle sur une partie
$$\mathcal{D}=\left\{\frac{p}{2^n}/p\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\right\}$$
dense dans $\mathbb{R}$, f est nulle sur $\mathbb{R}$.
c) Posons $\beta=f(0)$ et $\alpha=f(1)-\beta$.
La fonction $g:x\mapsto f(x)-\alpha x+\beta$ est continue et vérifie la propriété
$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(g(x)+g(y)\right)$$
donc g est nulle puis f affine.

Exercice 66 : [énoncé]
Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Si A est inversible
$$\chi_{AB}(\lambda)=\det(\lambda I_n-AB)=\det(A)\det(\lambda A^{-1}-B)$$
donc
$$\chi_{AB}(\lambda)=\det(\lambda A^{-1}-B)\det A=\det(\lambda I_n-BA)=\chi_{BA}(\lambda)$$
Ainsi les applications continues $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto\chi_{AB}(\lambda)$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto\chi_{BA}(\lambda)$ coïncident sur la partie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Ainsi pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$, $\chi_{AB}(\lambda)=\chi_{BA}(\lambda)$ et donc $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

Exercice 67 : [énoncé]
On sait
$${}^t(\mathrm{com}A)A=\det A.I_n$$
donc
$$\det(\mathrm{com}A)\det A=(\det A)^n$$
Si A est inversible on obtient
$$\det(\mathrm{com}A)=\det(A)^{n-1}$$
Puisque l'application $A\mapsto\det(\mathrm{com}A)$ est continue et qu'elle coïncide avec l'application elle aussi continue $A\mapsto(\det A)^{n-1}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut affirmer $\det(\mathrm{com}A)=(\det A)^{n-1}$ pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 68 : [énoncé]
a) Si A est inversible alors
$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{com}A)$$
et donc
$$\mathrm{com}A=\det(A)^t\left(A^{-1}\right)$$
De même
$$\mathrm{com}(P^{-1}AP)=\det(A)^t(P^{-1}A^{-1}P)$$
ce qui donne
$$\mathrm{com}(P^{-1}AP)={}^tP\mathrm{com}A^t(P^{-1})$$
Les fonctions $A\mapsto\mathrm{com}(P^{-1}AP)$ et $A\mapsto{}^tP\mathrm{com}A^t(P^{-1})$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ partie dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est deux fonctions sont donc égales. Ainsi la relation
$$\mathrm{com}(P^{-1}AP)={}^tP\mathrm{com}A^t(P^{-1})$$
est valable pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
b) C'est immédiat sachant que ${}^t(P^{-1})$ est l'inverse de ${}^tP$.

Exercice 69 : [énoncé]
a) On sait
$$\tilde{A}A=A\tilde{A}=\det A.I_n$$
Si A est inversible alors
$$\det\tilde{A}.\det A=(\det A)^n$$

donne
$$\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$$
L'application $A \mapsto \det \tilde{A}$ étant continue et coïncidant avec l'application elle aussi continue $A \mapsto (\det A)^{n-1}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut assurer que $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Si A est inversible alors $\tilde{A}$ aussi donc
$$\mathrm{rg}(A) = n \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = n$$
Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et donc $\tilde{A} = 0$. Ainsi
$$\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 0$$
Si $\mathrm{rg}(A) = n-1$ alors $\dim\ker A = 1$ or $A\tilde{A} = \det A.I_n = 0$ donne $\mathrm{Im}\tilde{A} \subset \ker A$ et donc $\mathrm{rg}(\tilde{A}) \leqslant 1$. Or puisque $\mathrm{rg}(A) = n-1$, A possède un déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul et donc $\tilde{A} \neq O$. Ainsi
$$\mathrm{rg}(A) = n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 1$$
c) Soit P une matrice inversible. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,
$$(P^{-1}\tilde{A}P)(P^{-1}AP) = \det A.I_n$$
et $P^{-1}AP$ inversible donc
$$P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP}$$
Ainsi
$$\tilde{A} = P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$$
Les applications $A \mapsto \tilde{A}$ et $A \mapsto P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$ sont continues et coïncident sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables alors il existe P inversible vérifiant $P^{-1}AP = B$ et par la relation ci-dessus $P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP} = \tilde{B}$ donc $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont semblables.
d) Si A est inversible alors $\tilde{A} = \det(A)A^{-1}$ et
$$\tilde{\tilde{A}} = \det(\tilde{A})\tilde{A}^{-1} = \det(A)^{n-2}A$$
Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$$\tilde{\tilde{A}} = \det(A)^{n-2}A$$

Exercice 70 : [énoncé]
Cas $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
On sait
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t(\mathrm{com}A),\ B^{-1} = \frac{1}{\det B}{}^t(\mathrm{com}B)$$
et
$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}{}^t(\mathrm{com}AB) = B^{-1}A^{-1}$$
donc
$$(AB)^{-1} = \frac{1}{\det(AB)}{}^t(\mathrm{com}AB) = \frac{1}{\det A\det B}{}^t(\mathrm{com}B){}^t(\mathrm{com}A)$$
puis
$${}^t(\mathrm{com}(AB)) = {}^t(\mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B))$$
et enfin
$$\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$$
Cas général
Posons
$$A_p = A + \frac{1}{p}I_n \text{ et } B_p = B + \frac{1}{p}I_n$$
Pour p assez grand $A_p, B_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et donc
$$\mathrm{com}(A_pB_p) = \mathrm{com}(A_p)\mathrm{com}(B_p)$$
Or la fonction $M \to \mathrm{com}M$ est continue donc par passage à la limite
$$\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$$

Exercice 71 : [énoncé]
Cas f de classe $\mathcal{C}^1$:
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$
Cas f continue :
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
On a alors
$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\|f-g\|_\infty + \left|\int_a^b g(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right|$$

donc pour n assez grand

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\varepsilon + \varepsilon$$

Par suite

$$\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 72 : [énoncé]
Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de fonction polynomiale telles $N_\infty(P_n - f) \to 0$.
On a alors

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f(t)-P_n(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(f(t)-P_n(t))\,\mathrm{d}t$$

or

$$\left|\int_0^1 f(t)(f(t)-P_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant N_\infty(f)N_\infty(f-P_n) \to 0$$

donc

$$\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

puis $f = 0$ par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive.

Exercice 73 : [énoncé]
Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telles $N_\infty(Q_n - f) \to 0$.
On a alors

$$\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Posons

$$P_n(t) = Q_n(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b Q_n(t)\,\mathrm{d}t$$

On vérifie alors sans peine que

$$\int_a^b P_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et } N_\infty(f-P_n) \to 0$$

Exercice 74 : [énoncé]
Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telles $N_\infty(Q_n - f) \to 0$. Posons $m_n = \inf\limits_{t\in[a,b]} Q_n(t) = Q_n(t_n)$ pour un certain $t_n \in [a,b]$. Montrons que $m_n \to m = \inf\limits_{t\in[a,b]} f$. Notons que $\inf\limits_{t\in[a,b]} f = f(t_\infty)$ pour un certain $t_\infty \in [a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, $N_\infty(Q_n - f) \leqslant \varepsilon$ donc $m_n = Q_n(t_n) \geqslant f_n(t_n) - \varepsilon \geqslant m - \varepsilon$ et $m = f(t_\infty) \geqslant Q_n(t_\infty) - \varepsilon \geqslant m_n - \varepsilon$ donc $|m_n - m| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $m_n \to m$. Il suffit ensuite de considérer $P_n = Q_n - m_n + m$ pour obtenir une solution au problème posé.

Exercice 75 : [énoncé]
Par le théorème de Weierstrass, il existe une suite (Q_n) de fonctions polynomiales telle $N_\infty(Q_n - f') \to 0$.
Posons alors $P_n(x) = f(a) + \int_a^x Q_n(t)\mathrm{d}t$. L'inégalité $|P_n(x) - f(x)| \leqslant \int_a^x |f'(t) - Q_n'(t)|\,\mathrm{d}t$ permet d'établir que $N_\infty(f - P_n) \to 0$ et puisque $P_n' = Q_n$, la suite (P_n) est solution du problème posé.

Exercice 76 : [énoncé]
a) On a

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = (x + (1-x))^n = 1$$

On a

$$\sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) = nx$$

via $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et la relation précédente
De manière semblable

$$\sum_{k=0}^n k^2B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1)B_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n kB_{n,k}(x) = nx(1+(n-1)x)$$

b) On a

$$n^2\alpha^2\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k\in A}(k-nx)^2 B_{n,k}(x) \leqslant \sum_{k\in[\![0,n]\!]}(k-nx)^2 B_{n,k}(x)$$

car les $B_{n,k}$ sont positifs sur $[0,1]$.

Par suite

$$n^2\alpha^2 \sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant nx(1-x)$$

d'où

$$\sum_{k\in A} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

c) Pour tout $\varepsilon > 0$, par l'uniforme continuité de f, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1], |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

On a alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{x\in A} |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x) + \sum_{x\in B} |f(x) - f(k/n)| B_{n,k}(x)$$

donc

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty \sum_{x\in A} B_{n,k}(x) + \sum_{x\in B} \varepsilon B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2} + \varepsilon$$

Pour n assez grand, on a

$$\|f\|_\infty / 2n\alpha^2 \leqslant \varepsilon$$

et donc $|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2\varepsilon$ uniformément en x.

Exercice 77 : [énoncé]

a) On a

$$\int_0^1 t(1-t^2)^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)}$$

On en déduit

$$a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \, \mathrm{d}t \geqslant 2\int_0^1 t(1-t^2)^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

b) Sur $[\alpha, 1]$,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{(1-\alpha^2)^n}{a_n} \leqslant (n+1)(1-\alpha^2)^n \to 0$$

c) Sur le compact $[-1, 1]$, f est uniformément continue car f est continue. Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in [-1,1], |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Pour $\alpha' = \min(\alpha, 1/2)$, on a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leqslant \alpha'$

Si $x, y \in [-1, 1]$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Sinon $x, y \in [1/2, +\infty[$ ou $x, y \in]-\infty, -1/2]$ et alors

$$|f(x) - f(y)| = 0 \leqslant \varepsilon$$

d) On a

$$f_n(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(u)\varphi_n(x-u) \, \mathrm{d}u$$

Or

$$\varphi_n(x-u) = \sum_{k=0}^{2n} a_k(u) x^k$$

donc

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{x-1}^{x+1} f(u) a_k(u) \, \mathrm{d}u \right) x^k$$

Mais

$$\int_{x-1}^{x+1} f(u) a_k(u) \, \mathrm{d}u = \int_{-1/2}^{1/2} f(u) a_k(u) \, \mathrm{d}u$$

pour $x \in [-1/2, 1/2]$ car $x - 1 \leqslant -1/2$ et $x + 1 \geqslant 1/2$ alors que f est nulle en dehors que $[-1/2, 1/2]$. Il s'ensuit que f_n est polynomiale.

e) On observe que

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(t) \, \mathrm{d}t = 1$$

et la relation proposée est alors immédiate sur $[-1/2, 1/2]$.

f) On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x) - f(x-t)| \varphi_n(t) \, \mathrm{d}t + 4\|f\|_\infty \int_\alpha^1 \varphi_n(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon + 4\|f\|_\infty \int_\alpha^1 \varphi_n(t)$$

Or

$$\int_\alpha^1 \varphi_n(t) \, \mathrm{d}t \to 0$$

donc pour n assez grand

$$4\|f\|_\infty \int_\alpha^1 \varphi_n(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

et alors

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant 2\varepsilon$$

g) Il suffit de commencer par approcher la fonction $x \mapsto f(2ax)$ qui vérifie les conditions de la question précédente.
h) Soit $A > 0$ tel que $[a, b] \subset [-A, A]$. Il suffit de prolonger f par continuité de sorte qu'elle soit nulle en dehors de $[-A, A]$.

Exercice 78 : [énoncé]
a) Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

$$0 \leqslant \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f-P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f-P) \leqslant (b-a)\|f\|_\infty \varepsilon$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient $\int_a^b f^2 = 0$ et donc $f = 0$.
b) L'intégrale étudiée est bien définie. Par intégration par parties,

$$(n+1)I_n = (1-i)I_{n+1}$$

Or $I_0 = \frac{1+i}{2}$ donc

$$I_n = \frac{(1+i)^{n+1}}{2^{n+1}} n!$$

c) $I_{4p+3} \in \mathbb{R}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4p+3} \sin(x) \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = 0$$

puis

$$\int_0^{+\infty} u^p \sin(u^{1/4}) \mathrm{e}^{-u^{1/4}} \,\mathrm{d}u = 0$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 79 : [énoncé]
a) Supposons f constante égale à C.

$$\int_a^b f(x)\,|\sin(nx)| \,\mathrm{d}x = C\int_a^b |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x$$

Posons $p = \left\lfloor \frac{an}{\pi} \right\rfloor + 1$ et $q = \left\lfloor \frac{bn}{\pi} \right\rfloor$.

$$\int_a^b |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x + \sum_{k=p+1}^{q} \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{q\pi}{n}}^{b} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x$$

On a

$$\left| \int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\pi}{n}$$

donc

$$\int_a^{\frac{p\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to 0$$

et aussi

$$\int_{\frac{q\pi}{n}}^{b} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to 0$$

De plus

$$\sum_{k=p+1}^{q} \int_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x = \frac{(q-p)}{n}\int_0^\pi \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{2(q-p)}{n} \to \frac{2(b-a)}{\pi}$$

Ainsi

$$\int_a^b |\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi}(b-a)$$

puis

$$\int_a^b f(x)\,|\sin(nx)| \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

b) Supposons f en escalier.
Soit $a_0, \ldots, a_n$ une subdivision adaptée à f.
Par l'étude qui précède,

$$\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,|\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f$$

Puis en sommant par la relation de Chasles

$$\int_a^b f(x)\,|\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi}\int_a^b f$$

c) Supposons enfin f continue par morceaux.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe φ en escalier vérifiant

$$\|f - \varphi\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Puisque

$$\int_a^b \varphi(x)\,|\sin(nx)| \,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi$$

pour n assez grand, on a

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\left|\sin(nx)\right|\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi\right| \leqslant \varepsilon$$

Or

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\left|\sin(nx)\right|\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\left|\sin(nx)\right|\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\left|\int_a^b \varphi - \int_a^b f\right| \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\left|\int_a^b f(x)\left|\sin(nx)\right|\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_a^b f\right| \leqslant 2\varepsilon + \frac{2}{\pi}\varepsilon$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\left|\sin(nx)\right|\,\mathrm{d}x \to \frac{2}{\pi}\int_a^b f$$